

Réponse à Pierre Macherey

Pierre CASSOU-NOGUÈS

*Les démons de Gödel*¹ entendent d'abord donner une sorte de portrait, un portrait qui associe des éléments personnels à la logique et aux recherches philosophiques de Gödel. Il s'agit de présenter le personnage mais aussi, en quelque sorte, d'entrer dans le monde dans lequel il vivait. Il s'agit, pour le dire autrement, d'essayer de passer d'une vue extérieure sur le personnage – une vue comme une photographie, enrichie par les témoignages de ses contemporains – à la vision propre que prend Gödel sur le monde. La lecture des textes et, en particulier, du journal philosophique que Gödel a tenu pour l'essentiel entre 1940 et 1946 permet de saisir certains aspects du monde du logicien et de l'unité qui semble lier son travail logique, ses recherches philosophiques et, disons, ses troubles dans la vie quotidienne.

J'ai examiné les textes de Gödel, les inédits en particulier, de près dans *Les démons de Gödel* et je profiterai de l'occasion présente pour discuter avec plus de distance du cadre de ce travail. Le problème qui m'intéressait avant tout est indiqué dans le sous-titre du livre : *Logique et folie*. Gödel est un logicien « fou ». J'entoure le qualificatif, la « folie » de Gödel, par des guillemets, d'une part, parce que je ne veux pas juger de l'état d'esprit du logicien ou, de façon alors très simpliste, diagnostiquer le cas de Gödel et, d'autre part, parce que je ne veux pas prétendre savoir ce que c'est que la folie en soi. En disant que Gödel est « fou », je n'entends que rapporter un on-dit. Gödel a toute une série de comportements qui en fait l'un de ces personnages dont on dit qu'ils sont fous. Il a peur des gaz qui s'échappent de son réfrigérateur : il en change si souvent qu'il est célèbre parmi les revendeurs d'électroménager des environs de Princeton. Il a peur que l'Institute for Advanced Studies, mécontent de son travail, le fasse empoisonner, et sa femme, Adele, est chargée de goûter ses repas. L'automne 1977, Adele se trouve être hospitalisée et Gödel cesse alors à peu près de s'alimenter : il meurt dans les premiers jours de l'année 1978.

Pierre Cassou-Noguès <pierre.cassou-nogues@univ-lille3.fr>

1. P. Cassou-Noguès, *Les démons de Gödel (logique et folie)*, Paris, Seuil, coll. « Science ouverte », 2007.

Il y a de multiples exemples, dans les témoignages des contemporains, de tels comportements « fous ». D'un oncle qui éviterait de passer à côté du réfrigérateur « à cause des gaz », d'un collègue qui aurait peur d'être empoisonné et ne mangerait rien sans que sa femme y ait goûté, on dira : « Vous savez bien, il est fou. » J'emploie « fou » dans le même sens, ce sens vague d'un on-dit.

À travers ce portrait, j'ai voulu mettre en évidence l'unité de la « folie », de la philosophie et de la logique de Gödel. Dans ses notes philosophiques – qu'il s'agisse de ses cahiers des années 1940, des brouillons pour les articles philosophiques qu'il publie de son vivant ou de ses conversations avec Hao Wang dans les années 1970² –, Gödel a développé toute une série d'idées bizarres concernant, par exemple, des êtres rationnels non humains ou des mondes parallèles. Ces notes forment une médiation explicite entre la logique et la « folie ». D'un côté, on voit bien que certaines de ses thèses expriment les peurs du logicien dans la vie quotidienne. Et, de l'autre côté, Gödel reconnaît – et de telle sorte qu'il est possible de le vérifier – que cette philosophie bizarre enveloppe son travail logique. Elle fonde certaines de ses recherches logiques, elle détermine les directions de son travail. Et, à rebours, Gödel tente d'appuyer ses thèses bizarres sur la logique et la physique de son temps. Pour reprendre son expression, il entend tirer sa philosophie d'une « extrapolation » de la science. Cette philosophie bizarre est donc à la fois à la base du travail logique et à son aboutissement. C'est en ce sens que je dis qu'elle l'enveloppe.

L'unité entre « folie », philosophie et logique pose alors au moins deux problèmes. Le premier concerne l'interprétation de la logique. Que peut-on faire dire à un théorème logique ? On connaît la dénonciation – par A. Sokal et J. Briemont³, par J. Bouveresse également⁴ – des usages de concepts, ou d'énoncés, scientifiques en philosophie. Or il se trouve d'abord que Gödel emploie par avance le terme même que J. Bouveresse stigmatise, « l'extrapolation ». La philosophie, pour Gödel, est tirée d'une « extrapolation » de la science, c'est-à-dire non pas une lecture rigoureuse et stricte des énoncés scientifiques mais bien une interprétation qui dégage des idées, des tendances dans les théories actuelles et les prolonge au-delà de ce que celles-ci établissent au sens strict. C'est, par exemple, ce qu'il tente à propos de la physique sur le thème de la temporalité. Une partie de ses réflexions tiennent à une simple lecture de son résultat sur l'existence d'univers qui autorisent le voyage dans le temps, mais une seconde partie relève, selon Gödel lui-même, d'une telle extrapolation. Par ailleurs, bien qu'il n'« extrapole » pas la logique, il entend tirer de son théorème d'incomplétude toute une série de conséquences philosophiques. Certaines rejoignent d'assez près les conclusions des auteurs que critiquent J. Bouveresse ou A. Sokal et

2. H. Wang, *A Logical Journey, From Gödel to Philosophy*, Cambridge, MIT Press, 1996.

3. Notamment *Impostures intellectuelles*, Paris, Librairie générale française, 1997.

4. Notamment *Vertiges et prodiges de l'analogie*, Paris, Raisons d'agir, 1999.

J. Bricmont. Ainsi, Gödel a une interprétation politique de son théorème d'incomplétude qui n'est pas sans rappeler celle de R. Debray⁵. Ce n'est pas dire que les textes de R. Debray soient corrects d'un point de vue logique. Clairement, R. Debray appelle un « principe » ce qui est un « théorème » d'incomplétude et ne vaut que sous certaines hypothèses concernant le système en question. En même temps, cette « erreur » serait rectifiable. Il suffirait, de ce point de vue, de dire en gros que le théorème de Gödel est l'illustration en logique d'un principe plus large d'incomplétude, selon lequel le langage en général pose des problèmes auxquels il ne permet pas de répondre et qui appellent alors un rapport sur un autre mode à une transcendance. Cette perspective serait assez proche à la fois de la méthode, par extrapolation, qu'évoque Gödel à propos de la physique et du contenu même de ses réflexions sur l'incomplétude.

Je ne veux pas défendre les textes de R. Debray et, à mes yeux, cette rencontre avec Gödel ne suffit certainement pas à valider les conclusions tirées du théorème d'incomplétude. La philosophie de Gödel ne m'intéresse que comme objet d'étude dans ce double rapport à la logique et à la « folie ». Le problème qui m'occupe est de savoir ce que l'on peut légitimement tirer d'un énoncé scientifique. Sans même extrapoler la logique, Gödel utilise son théorème d'incomplétude pour établir des thèses philosophiques comme l'indépendance de l'esprit par rapport au cerveau, l'immortalité de l'esprit ou, semble-t-il, la possibilité du diable (l'impossibilité de se garantir contre un Malin Génie). Il lie pour cela son théorème d'incomplétude à des principes philosophiques, qui ont une tradition : un « optimisme rationaliste », par exemple, selon lequel l'esprit doit pouvoir résoudre tout problème qu'il peut formuler. La déduction de thèses bizarres à partir du théorème d'incomplétude et des principes philosophiques qui lui sont associés semble être rigoureuse et, du moins, il serait difficile de parler à propos de Gödel d'« imposture intellectuelle ». Faut-il en conclure que le théorème d'incomplétude implique la possibilité du diable ? Je ne le crois pas. Il faut plutôt reconnaître que les principes philosophiques que Gödel lui associe sont étrangers au théorème de 1931, non pertinents pour en dégager la signification. Mais la difficulté est alors de distinguer ce qui constitue un contexte des principes « pertinents ».

On peut défendre l'idée qu'un théorème n'est rien qu'un énoncé démontré dans une théorie et n'a pas de signification en dehors de cette dernière. Dans cette perspective, le théorème d'incomplétude dit simplement qu'un système vérifiant certaines caractéristiques comporte des formules sans variables libres qui ne sont ni démontrables ni réfutables à partir des axiomes, ou qu'une machine de Turing ne peut pas imprimer sur son ruban toutes les formules vraies dans un modèle donné de

5. R. Debray, *Critique de la raison politique*, Paris, Gallimard, coll. « Tel », 1987. Voir la lettre de Gödel à Scurlock, citée dans *Les démons de Gödel*, *op. cit.*, p. 164.

l'arithmétique de Peano. Toutes les notions (machine de Turing, imprimer sur le ruban, formules vraies dans un modèle) sont considérées comme définies dans cette théorie, en un sens large, qu'est la logique.

Il me semble cependant qu'une telle perspective ne permet pas de rendre compte de ce qui fait l'intérêt des théorèmes aux yeux mêmes des logiciens, ni de ce qui justifie la définition des notions en question. D'une part, il est essentiel dans la définition des machines de Turing qu'elles constituent un modèle de l'esprit ou un modèle du fonctionnement de l'esprit au cours d'un calcul : c'est seulement par là que Turing peut assurer que ses machines embrassent la totalité des fonctions calculables. Et, d'autre part, l'importance du théorème de 1931 n'est pas tant dans l'habileté de la démonstration – bien que celle-ci dépende d'avancées techniques avec la définition exacte des fonctions primitives récursives ou le codage de la métamathématique dans l'arithmétique élémentaire – ou dans ses conséquences en logique, que dans le fait que l'existence de propositions indécidables dans l'arithmétique élémentaire pose immédiatement des questions philosophiques. C'est bien dans cette perspective que le théorème d'incomplétude est reçu et compris par Gödel lui-même (cf. *Les démons de Gödel*, p. 20). Autrement dit, le théorème d'incomplétude et les notions qui y interviennent sont d'emblée pris dans un contexte, disons d'abord philosophique, où ils prennent une signification plus large que leur usage technique. Ma thèse, de façon très générale, serait que les énoncés scientifiques sont toujours pris dans un contexte qui leur donne une signification plus large que leur simple usage dans la théorie à laquelle ils appartiennent. Il n'y a pas de science, et il n'y a pas de logique sans un tel contexte.

Revenons à la discussion initiale sur les conséquences bizarres du théorème d'incomplétude dans la philosophie de Gödel. Les conclusions de Gödel dépendent du contexte dans lequel il intègre son théorème. Elles nous semblent « folles » parce que ce contexte n'est pas celui dans lequel nous prenons habituellement le théorème. Mais nous prenons nous-mêmes le théorème dans un contexte, pour demander, par exemple, – question que l'on trouve dans la littérature – dans quelle mesure, ou à quelles conditions, le théorème permet de distinguer l'esprit de la machine de Turing. Bref, la discussion sur la légitimité d'une interprétation philosophique est elle-même philosophique et doit porter sur le contexte, les principes extra-scientifiques qui sont associés à l'énoncé scientifique : leur validité ou, dans le cas de Gödel, leur pertinence. On peut bien relever des erreurs chez les philosophes mais l'existence d'un contexte et, par conséquent, l'interprétation extra-scientifique des théories scientifiques, qui leur donne un sens plus large que leur usage technique, sont intrinsèques à la visée des sciences.

Cela m'amène au deuxième problème que pose l'unité de la « folie », de la philosophie et de la logique de Gödel. Le problème est celui de la portée de cette

unité. Une objection au projet du livre serait la suivante : si l'on accorde que la logique de Gödel est liée à sa philosophie bizarre et, plus largement, à sa « folie », on peut néanmoins encore maintenir que ce lien n'est que subjectif. À savoir, il se trouverait que, accidentellement, la logique de Gödel, ou certains de ses travaux expriment certaines « peurs », une certaine « folie », que l'on rencontre aussi dans sa vie, mais ce rapport d'expression ne touche en rien la portée et l'intérêt intrinsèques de ses théorèmes. Il concerne le travail de Gödel en tant qu'il est l'œuvre d'un individu, non pas en tant qu'il s'intègre dans cette discipline théorique qu'est la logique. Dans cette perspective, le portrait que je trace peut bien toucher l'homme, il n'apporterait rien à la logique, ni à la philosophie de la logique.

La difficulté, cependant, dans cette perspective est d'isoler ce que l'on entend sous cette logique, qui serait ainsi indépendante des préoccupations du savant. Je le répète, l'exemple de la calculabilité montre que l'on ne peut pas, sans abstraction, considérer la logique comme une suite de résultats motivés par des considérations techniques. Cette perspective ne permet pas de rendre compte du développement de la logique : ni de la définition des notions (comme la définition de la calculabilité), ni de l'intérêt qui s'attache à certains théorèmes et détermine donc la direction dans laquelle s'engagent les travaux des logiciens. En ce sens, il n'y a pas de logique sans contexte, et le portrait de Gödel que j'ai tenté de tracer entend précisément mettre en évidence le contexte dans lequel s'inscrit la logique de Gödel, un contexte qui s'exprime d'abord dans des thèses, disons, philosophiques et s'enracine ensuite dans des « images », des « peurs ». Celles-ci se manifestent dans la vie quotidienne comme dans les écrits du logicien.

Je parle d'un contexte imaginaire dans la mesure où ces « images », ces « peurs » ou, disons, ces thèmes diffus dans la vie et l'œuvre du logicien sont de l'ordre de ceux qui, lorsqu'ils sont collectifs et non simplement individuels, s'expriment avant tout dans la littérature. J'emploie donc le terme « imaginaire » en un sens vague (qui ne recoupe pas la distinction lacanienne entre le symbolique et l'imaginaire).

Ce contexte imaginaire du travail logique se manifeste clairement aussi dans le cas d'un contemporain de Gödel, Emil Post. Post, dont la « folie » l'a conduit à être régulièrement interné et qui est mort en 1954 d'une crise cardiaque à la suite d'un traitement par électrochocs, notait quotidiennement ses réflexions logico-philosophiques dans des cahiers. On voit, à la lecture de ces journaux, que le travail de Post est motivé par certaines images qui sont liées à ses troubles. Ce sont des images, comme celles d'un parallélisme dans l'esprit, de développements concomitants en différents points de l'esprit, qui poussent Post dans certaines directions et lui font méconnaître l'importance de notions comme la machine de Turing, qu'il n'accepte jamais véritablement. Inversement, ces résultats logiques se prolongent dans son

esprit sous la forme d'images récurrentes – ainsi, le personnage de la tortue qui porte ses instructions sur son dos et doit être suivi d'un assistant qui les lui lit. Il n'y a pas de doute que l'intérêt de Post pour la logique, ce qui fait qu'un théorème, une notion et une simple direction de recherche sont « intéressants », dépend d'un contexte imaginaire, d'un système d'images associé.

Ce contexte imaginaire, bien qu'il s'exprime de façon explicite dans les notes de Post, n'y est pas sans doute reconnu comme tel. Post ne pourrait pas décrire ce qui fait pour lui l'intérêt de telle ou telle notion. C'est seulement le commentateur qui, lisant pour ainsi dire par-dessus l'épaule du logicien, observe que telle notion est associée à telle image que le logicien développe avec fascination. Le contexte imaginaire ne se révèle qu'à celui qui n'y participe pas. C'est parce que les images de Post, ou les peurs de Gödel, ne sont pas les nôtres que nous pouvons les voir comme telles. Et, à l'inverse, la question que l'étude des cas de Post et de Gödel pose est de savoir quel est le contexte imaginaire qui anime pour nous la logique et que nous ne percevons pas parce que, précisément, ces images nous sont naturelles et n'ont pas cette étrangeté qui les révèlent dans les notes de ces logiciens « fous ».

Si l'on accepte que le travail logique de Gödel et de Post, les directions que prennent leurs recherches, l'intérêt qu'ils trouvent à certains énoncés ou à certaines notions sont fondés sur un contexte imaginaire, il est difficile de considérer que notre logique est pure de tout imaginaire et que l'intérêt que nous y trouvons relève d'un mécanisme entièrement différent. Il faut admettre que notre logique s'enracine également dans un imaginaire que nous ne voyons pas précisément parce que nous utilisons ces images, les associons aux notions logiques à ce point que nous les confondons avec elles. En fait, l'imaginaire de notre logique ne peut se montrer que négativement par le rapport ambigu des logiciens « fous » à nos images, auxquelles ils n'adhèrent pas totalement. Leur « folie » vient de ce que l'imaginaire qui sous-tend leur logique comme leur philosophie est décalé par rapport au nôtre ou, pour reprendre l'expression de Gödel, à celui de l'esprit du temps : décalé et, manifestement, moins solide. Ainsi, Post, qui revient avec une insistance qui nous semble « folle » sur le personnage de son « travailleur » et la possibilité de processus parallèles dans l'esprit humain, s'étonne de ce que les logiciens de son temps s'attachent aux machines de Turing et à cet improbable déterminisme linéaire, où les étapes du calcul se suivent l'une l'autre selon des lois univoques.

Que la logique soit pour nous également fondée sur un contexte imaginaire me semble se révéler clairement dans la définition de la calculabilité par les machines de Turing. Il y a, avant Turing, deux réponses à cette question de savoir ce qu'est une procédure calculable, une procédure qui suit des règles univoques et aboutit en un nombre fini d'étapes. Ce sont les deux définitions proposées par Church et par Gödel

en 1934. Cependant, avant Turing, ces tentatives ne sont pas réellement, unanimement, considérées comme des définitions : il n'est pas clair qu'elles embrassent la totalité des fonctions calculables et donnent un contenu définitif à la notion de « calculabilité ». C'est, aux yeux de Gödel, seulement Turing qui établit l'adéquation de ces définitions en les reformulant par le concept de machine⁶. Or la thèse de Turing passe par différents moments. Il y a la définition de ces machines comme concept logique. Il y a la comparaison de la machine avec l'esprit qui calcule. Cette comparaison a la charge de montrer que les procédés de l'esprit qui calcule se laissent reproduire sur une « machine ». Elle vise à établir que, en effet, les procédures de calcul que l'esprit est susceptible de réaliser peuvent être identifiées à ces « machines ». La thèse de Turing s'appuie sur cette comparaison raisonnée mais elle s'appuie également sur l'image de la machine. Les textes logiques qui précèdent Turing, les textes de Frege, de von Neumann, de Gödel, qualifient en un sens vague les procédures calculables, ou formelles, de « mécaniques ». Il y a aussi toute une littérature qui, depuis le XIX^e siècle, associe la notion de raisonnement à celle de machine. Ce sont des images diffuses que Turing fixe dans un concept logique. La thèse de Turing ne peut avoir lieu que dans un contexte qui fait déjà place à l'idée de machine, et de machine à raisonner. L'article de 1937 ne peut voir le jour que dans une société qui utilise des machines, et des machines, qui, comme les métiers à tisser Jacquart dont s'inspire Babbage, peuvent être programmées, c'est-à-dire peuvent réaliser différentes tâches selon les instructions qu'on leur donne. Ces machines sont d'abord passées dans la littérature et Turing les a introduites en logique.

Le caractère imaginaire de la référence à la machine dans la thèse de Turing apparaît bien lorsque l'on rapproche la machine de Turing et le « travailleur » de Post. Le travailleur de Post peut reproduire toutes les procédures qu'une machine de Turing peut calculer. Et on peut montrer de la même façon que tous les procédés qu'effectue l'esprit au cours d'un calcul peuvent être réalisés par le travailleur devant sa chaîne (ou traduits par certains gestes du travailleur). On pourrait donner un nom de code à chaque travailleur qui reçoit une liste d'instructions, montrer que le travailleur est en lui-même universel et peut faire le travail de n'importe quel autre mais qu'aucun ne peut déterminer en nombre fini d'étapes si les « calculs » que réalise un travailleur dont on donne le nom de code aboutissent, oui ou non. L'article de Post est peut-être moins clair que celui de Turing, mais le dispositif que Post imagine est équivalent, dans son contenu logique comme dans la justification épistémologique, à la machine de Turing. Pourquoi alors le développement de la logique a-t-il retenu la machine de Turing et laissé de côté le travailleur de Post pour le réduire à une curiosité historique ? C'est bien que, indépendamment de la définition logique et de la

6. Je discute longuement de ce point dans « Gödel et la thèse de Turing », *Revue d'histoire des mathématiques*, à paraître.

justification épistémologique, il y a dans la machine de Turing quelque chose qui est pour nous plus satisfaisant que le travailleur de Post, quelque chose qui est en logique indéfinissable mais a fait le succès du personnage de l'homme-machine dans la littérature des XIX^e et XX^e siècles.

On pourrait objecter que la thèse de Turing constitue un cas à part et qu'il serait plus difficile de mettre au jour les images qui jouent en théorie des ensembles ou dans une théorie mathématique comme, disons, la géométrie algébrique. C'est en fait à telle extension, de cette idée de contexte imaginaire, que je travaille actuellement (sur l'exemple de la théorie des ensembles et, à propos encore de la notion de machine, sur les travaux du groupe cybernétique à la fin des années 1940). Une difficulté est que l'adhésion à l'imaginaire le fait disparaître comme tel. Le propre des images est de donner un intérêt aux notions auxquelles elles sont associées et qui les expriment dans la théorie scientifique. Les images s'effacent alors derrière les notions qui les soutiennent. Les notions semblent prendre un intérêt en soi dont on ne saurait dire quelle en est la source. C'est seulement un décalage par rapport à l'imaginaire qui peut révéler celui-ci, notre décalage par rapport au travailleur de Post et à l'insistance sur les procédés parallèles de l'esprit humain ou le décalage de Post par rapport à la machine de Turing et l'idée qui y est impliquée d'un déterminisme linéaire des processus mentaux.

Dans le cas de la calculabilité, le contexte imaginaire semble déterminer les principes de la théorie. Si l'on accorde que c'est Turing qui établit réellement la définition de la calculabilité et que la définition de Turing est fondée dans un contexte imaginaire, alors il faut reconnaître, avec la calculabilité, une théorie logique dont le contenu est fixé en référence à l'imaginaire. Il me semble difficile de contester la référence à l'imaginaire dans la définition de Turing, parce que c'est un fait que la littérature avant la logique parle de l'homme comme machine à calculer, et que, en comparant l'esprit calculateur à ses machines abstraites, Turing, qu'il le veuille ou non, évoque ces personnages mi-hommes et mi-machines qui, comme Sherlock Holmes, ont déjà envahi l'esprit du temps⁷. En omettant cette référence à l'imaginaire, on rend par ailleurs incompréhensible le primat de la machine de Turing sur le travailleur de Post ou, du reste, sur les réseaux de McCulloch et Pitts. L'importance de Turing dans la définition de la calculabilité pourrait cependant être nuancée. S'il est vrai, historiquement, que la définition de la calculabilité n'est pas fixée avant Turing (et que les thèses de Gödel et de Church jouent avant 1936 le rôle de conjectures qu'il reste encore à vérifier), on pourrait néanmoins opposer que l'importance de Turing ne tient pas tant à sa propre analyse de la calculabilité, contrairement à ce que croit

7. Comme on le sait, Sherlock Holmes est l'un des premiers hommes-machines à raisonner. Sur ce point, je renvoie au « Complément 1 » d'*Une histoire de machines, de vampires et de fous*, Paris, Vrin, 2007.

Gödel, qu'au fait de donner une troisième définition, équivalente à celles de Gödel et de Church, et manifestant alors une sorte de noyau commun. La notion de la calculabilité serait fixée non pas par le travail de Turing mais par la convergence des définitions de Gödel, de Church, de Turing, de Post et bientôt de Kleene, au moyen du schéma I. Il resterait néanmoins à savoir alors pourquoi le nom de Turing reste attaché de façon toute particulière à cette notion qui émerge alors, plutôt que celui de Post ou de Kleene.

Ce n'est sans doute pas le lieu pour entrer plus avant dans l'histoire de la calculabilité et la question de la réception des différentes définitions. La thèse qui m'occupe actuellement est plus faible que celle à laquelle l'exemple de la calculabilité pouvait me conduire dans *Les démons de Gödel*. Il serait en effet impossible de soutenir, de façon générale, que les principes d'une théorie, comme les axiomes de la théorie des ensembles, sont déterminés en référence à un contexte imaginaire. Ma thèse serait plutôt que l'intérêt des notions et, par conséquent, les directions du travail des mathématiciens (les mathématiciens ne s'intéressent pas à toutes les notions ou ne cherchent pas à démontrer tous les théorèmes mais seulement des théorèmes « intéressants ») sont déterminés par un écho imaginaire : par ceci que ces notions, ces énoncés reprennent une préoccupation plus large et que l'on rencontre avant tout dans la littérature. Je tente de mettre en évidence cette thèse sur différents domaines et, par exemple, sur la théorie des ensembles.

Cependant, la théorie de la calculabilité a également une autre portée. Elle détermine en effet ce qui reste en principe le critère de validation des énoncés mathématiques. On considère qu'un théorème, après avoir été éventuellement reformulé, doit pouvoir être déduit formellement des axiomes de la théorie des ensembles, et « formellement » signifie selon des règles explicites, que peut donc suivre une machine de Turing. Les théorèmes mathématiques sont les énoncés que certaines machines à qui l'on aurait donné les axiomes de la théorie des ensembles et qui disposeraient d'une quantité indéfinie de papier imprimeraient sur leur ruban. Cette déduction formelle à partir de la théorie des ensembles n'est jamais faite dans les mathématiques des mathématiciens. Certains logiciens contestent également ce critère de validation. Néanmoins, cette idée, qu'un théorème doit suivre formellement la théorie des ensembles, reste à l'arrière-plan des mathématiques, de sorte que la notion de machine de Turing se trouve fixer le mode de validation des énoncés mathématiques et, par là, ancrer de nouveau les mathématiques dans l'imaginaire. La question, au fond, serait de savoir pourquoi nous voulons qu'un théorème puisse être déduit mécaniquement de la théorie des ensembles. Et une réponse serait : parce que nous sommes fascinés par l'image de machine, ou l'idée d'être des machines.